# VOLTERRA İNTEGRO DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ

Hazırlayan : Zeynep Tütüncüoğlu
Tez Danışmanı : Doç. Dr. Erdoğan Mehmet Özkan
*Yıldız Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü*

## GİRİŞ

Bu lisans bitirme tezinde birinci bölümde Fredholm ve Volterra integral denklemlerine değinilmiştir. İkinci bölümde Volterra İntegro diferansiyel denklemlerin Varyasyonel İterasyon ve Laplace Dönüşüm Metoduyla çözümü ele alınmıştır.

## Volterra İntegro-Diferansiyel Denklem Sistemleri

Volterra, bir nüfus artış modelini incelerken aynı zamanda kalıtsal etkilerini de inceledi. Araştırma çalışması hem diferansiyel hem de integral operatörlerin aynı denklemde görünmesiyle sonuçlandı. Bu yeni tip denklem, Volterra İntegro diferansiyel denklemi olarak adlandırılır ve $\boldsymbol{u}^{(i)} = \frac{d^n u}{dx^i}$ iken şöyle gösterilir :

$$u^{(i)}(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)u(t)dt$$

Çünkü elde edilen denklem diferansiyel operatörü ve integral operatörü birleştirir, daha sonra Volterra integro-diferansiyel denkleminin özel çözümünün u(x) belirlenmesi için u(0), u'(0),…,$\mathbf{u}^{(\mathbf{i-1})}(\mathbf{0})$ başlangıç koşullarını tanımlamak gerekir.

$$u^i(x) = f_1(x) + \int_0^x (K_1(x,t)u(t) + \widetilde{K}_1(x,t)v(t) + \cdots)dt$$
$$v^i(x) = f_2(x) + \int_0^x (K_2(x,t)u(t) + \widetilde{K}_2(x,t)v(t) + \cdots)dt$$

Belirlenecek olan u(x),v(x),… fonksiyonları $K_i(x,t)$ ve $\widetilde{K}_i(x,t)$ çekirdekleri ve $f_i(x)$ fonksiyonları gerçek değerlidir. İntegro diferansiyel denklem sistemini çözmek için sayısal ve analitik olmak üzere iki yöntem vardır.

## 1. Varyasyonel İterasyon Yöntemi

Varyasyonlu iterasyon yönteminde iki temel adım kullanılır. İlk önce integrasyon en düzgün şekilde parçalarına ayırılarak ve sınırlı varyasyon kullanılarak Lagrange çarpanının λ bulunması gerekir. λ belirlendikten sonra, u(x) çözümünün $u_{n+1}(x)$ , $n \geq 0$ ardışık yaklaşımların belirlenmesi için sınırlı varyasyon içermeyen bir iterasyon formülü kullanılmalıdır. Sıfırıncı yaklaşım $u_0(x)$ herhangi bir fonksiyon olabilir. Fakat başlangıç değerleri $u(0), u'(0), \ldots$ tercihen seçici sıfırıncı yaklaşım $u_0(x)$ için kullanılır.

$$\lambda = (-1)^n \frac{1}{(n-1)!}(\xi - x)^{n-1}$$

Eğer çözümün kapalı bir formu varsa ve bileşenleri Adomian ayrıştırma yöntemindeki gibi değilse bu yöntem kesin çözüme yakınsak ardışık yaklaşımlar sağlar. Varyasyonel iterasyon yöntemi, lineer ve lineer olmayan problemleri, Adomian ayrıştırma yöntemindeki gibi belli kısıtlamalara ihtiyaç duymadan aynı şekilde ele alır.

Volterra integro diferransiyel denklem sisteminin düzenlenmiş fonksiyonları şu şekildedir :

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(t)(u_n^{(i)}(t) - f_1(t) - \int_0^t K(t,r)\tilde{u}_n(r)dr)dt\ ,$$
$$v_{n+1}(x) = v_n(x) + \int_0^x \lambda(t)(v_n^{(i)}(t) - f_2(t) - \int_0^t K(t,r)\tilde{v}_n(r)dr)dt$$

### ÖRNEK

Aşağıdaki Volterra integro diferansiyel denklemini Varyasyonel iterasyon yöntemiyle çözünüz.

$$u'(x) = 1 + x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \int_0^x \big((x-t)u(t) + (x-t+1)v(t)\big)dt$$
$$v'(x) = -1 - 3x - \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 + \int_0^x \big((x-t+1)u(t) + (x-t)v(t)\big)dt$$

u(0)=1, v(0)=1.

### ÇÖZÜM

$$I_1(t) = \int_0^t \big((t-r)u_n(r) + (t-r+1)v_n(r)\big)dr$$
$$I_2(t) = \int_0^t \big((t-r+1)u_n(r) + (t-r)v_n(r)\big)dr$$

ve birinci mertebeden diferansiyel denklem için λ=-1 iken bu sistemin düzeltme işlevi şu şekildedir :

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x (u_n'(t) - 1 - t + \tfrac{1}{2}t^2 - \tfrac{1}{3}t^3 - I_1(t))\,dt$$
$$v_{n+1}(x) = v_n(x) - \int_0^x (v_n'(t) + 1 + 3t + \tfrac{3}{2}t^2 + \tfrac{1}{3}t^3 - I_2(t))\,dt$$

$u_0(x) = u(0) = 1$ $ve$ $v_0(x) = v(0) = 1$ başlangıç koşullarını kullanabiliriz. Bu seçimi düzeltme işlevinde kullanmak bize aşağıdaki ardışık yaklaşımları verir

$$\begin{cases} u_0(x) = 1, \\ v_0(x) = 1, \end{cases}$$
$$\begin{cases} u_1(x) = 1 + x + x^2 + \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{12}x^4, \\ v_1(x) = 1 - x - x^2 - \dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{1}{12}x^4, \end{cases}$$
$$\begin{cases} u_2(x) = 1 + x + x^2 + \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^3\right) + \left(\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{12}x^4\right) - \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{360}x^6, \\ v_2(x) = 1 - x - x^2 + \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^3\right) + \left(\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{12}x^4\right) + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{360}x^6, \end{cases}$$
$$\begin{cases} u_3(x) = 1 + x + x^2 + \left(\frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{120}x^5\right) + \left(\frac{1}{360}x^6 - \frac{1}{360}x^6\right) + \cdots, \\ v_3(x) = 1 - x - x^2 + \left(\frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{120}x^5\right) + \left(\frac{1}{360}x^6 - \frac{1}{360}x^6\right) + \cdots, \end{cases}$$

Buna göre kesin çözüm şu şekildedir :

$$\big(u(x), v(x)\big) = (1 + x + x^2, 1 - x - x^2)$$

## 2. Laplace Dönüşüm Yöntemi

Laplace dönüşümünün konvolüsyon çarpımı $(f_1 * f_2)(x)$ aşağıdaki gibi verilir

$$\mathcal{L}\{(f_1 * f_2)(x)\} = \mathcal{L}\{\int_0^x f_1(x-t)f_2(t)dt\} = F_1(s)F_2(s)$$

Laplace dönüşümünün türevlerini şöyle özetleyebiliriz

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = s\mathcal{L}\{f(x)\} - f(0),$$
$$\mathcal{L}\{f''(x)\} = s^2\mathcal{L}\{f(x)\} - sf(0) - f'(0)$$
$$\mathcal{L}\{f'''(x)\} = s^3\mathcal{L}\{f(x)\} - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

### ÖRNEK

Aşağıdaki Volterra integro diferansiyel denklem sistemini Laplace dönüşüm yöntemini kullanarak çözünüz.

$$u'(x) = 2x^2 + \int_0^x \big((x-t)u(t) + (x-t)v(t)\big)dt, \quad u(0) = 1,$$
$$v'(x) = -3x^2 - \tfrac{1}{10}x^5 + \int_0^x \big((x-t)u(t) - (x-t)v(t)\big)dt, \quad v(0) = 1.$$

### ÇÖZÜM

Çekirdeklerin $K_1(x-t) = K_z(x-t) = x - t$ olduğunu dikkate alalım. İki tarafın da Laplace dönüşümünü alırsak

$$sU(s) - 1 = \tfrac{4}{s^3} + \tfrac{1}{s^2}U(s) + \tfrac{1}{s^2}V(s)\ ,$$
$$sV(s) - 1 = -\tfrac{6}{s^3} - \tfrac{12}{s^6} + \tfrac{1}{s^2}U(s) - \tfrac{1}{s^2}V(s)\ ,$$

Ya da buna eş değer olarak

$$\left(s - \tfrac{1}{s^2}\right)U(s) - \tfrac{1}{s^2}V(s) = 1 + \tfrac{4}{s^3},$$
$$\left(s + \tfrac{1}{s^2}\right)V(s) - \tfrac{1}{s^2}U(s) = 1 - \tfrac{6}{s^3} - \tfrac{12}{s^6}$$

elde edilir.

Bu sistemleri çözersek

$$9 + U(s) = \tfrac{1}{s} + \tfrac{3!}{s^4}\ , \quad V(s) = \tfrac{1}{s} - \tfrac{3!}{s^4}$$

bulunur.

İki tarafın da ters Laplace dönüşümünü alırsak kesin çözüm aşağıdaki gibi bulunur.

$$\big(u(x), v(x)\big) = (1 + x^3, 1 - x^3)$$